

University of West Bohemia in Pilsen
Department of Computer Science and Engineering
Univerzitni 8
30614 Pilsen
Czech Republic

Fourierovy hologramy

Technical report

Martin Janda, Ivo Hanák, Jan Bařtipán

Technical Report No. DCSE/TR-2007-11
December, 2007

Distribution: public

Technical Report No. DCSE/TR-2007-11
December, 2007

Fourierovy hologramy

Martin Janda, Ivo Hanák, Jan Bařtipán

Abstract

Tento dokument je zprávou o řešení aktivity 7ZHO13.

This work has been partially supported by the Ministry of Education, Youth and Sports of the Czech Republic under the research program LC-06008 (Center for Computer Graphics). This work has been partially supported by the EU project EU within FP6 under Grant 511568 with the acronym 3DTV

Copies of this report are available on
<http://www.kiv.zcu.cz/publications/>
or by surface mail on request sent to the following address:

University of West Bohemia in Pilsen
Department of Computer Science and Engineering
Univerzitni 8
30614 Pilsen
Czech Republic

Copyright (C) 2006 University of West Bohemia in Pilsen, Czech Republic

Authors hereby declare that this is their own work and all materials are properly cited.

Obsah

| | | |
|---|---------------|---|
| 1 | Úvod | 1 |
| 2 | Přehled metod | 2 |
| 3 | Implementace | 6 |
| 4 | Závěr | 8 |

Kapitola 1

Úvod

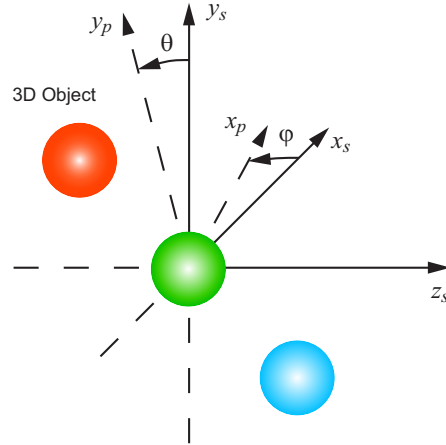
Aktivita 7ZHO13 vznikla na základě technické zprávy [Jan07], ve které byly metody publikované v [AR03, SIY04] označeny jako perspektivní. Obě metody se zabývají syntézou Fourierových hologramů [Har96], což jsou hologramy, které pro záznam i rekonstrukci používají velkou spojku. Jinými slovy jsou Fourierovy hologramy záznamem Fourierovy transformace optického pole na fokální rovině spojky. Tato skutečnost způsobuje, že syntéza Fourierovo hologramu má specifické matematické vlastnosti, více viz [Jan07].

Cílem aktivity 7ZHO13 mělo být přímé porovnání vlastností uvedených syntetizačních metod s metodou vyvíjenou naší holografickou skupinou [JHS06, HJS07]. Uvažované metody bylo nutné nejprve implementovat a poté provést příslušná měření.

Kapitola 2

Přehled metod

V této kapitole krátce představíme obě metody. Text této sekce byl převzat z [Jan07]. Popis začneme metodou podle [AR03]. Autoři kombinují soubor dvourozměrných projekcí scény speciálním postupem, který je ekvivalentní záznamu Fourierského hologramu. Projekce jsou počítány z různých směrů, které jsou vybírány způsobem vyobrazeným v obr.2.1. Směr pohledu je parametrizován dvěma úhly ϕ_m a θ_m .



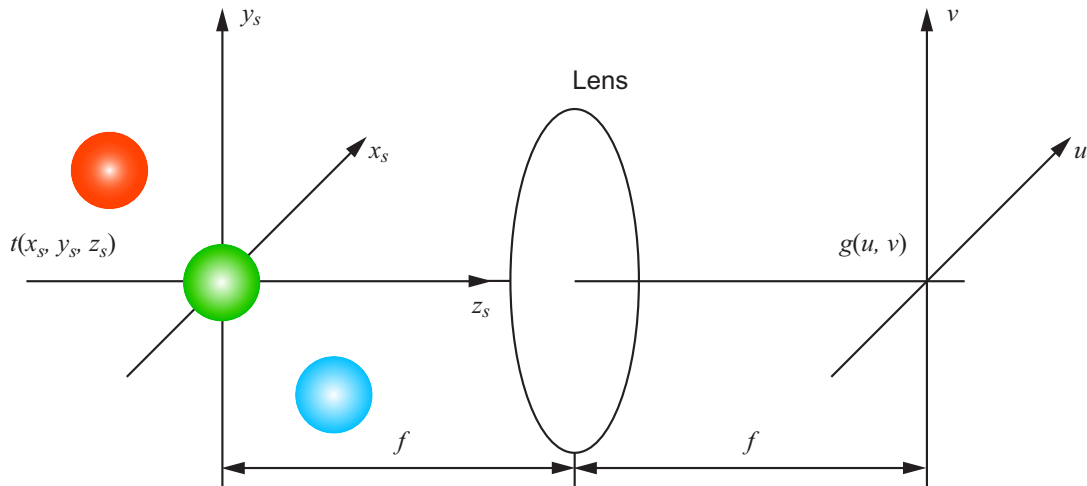
Obrázek 2.1: Projekce scény z úhlů $\theta = \theta_m$ a $\varphi = \phi_m$ [AR03].

Výsledkem projekce je diskrétní matice vzorků $p_{mn}(x_p, y_p)$, kde x_p a y_p jsou diskrétní pozice vzorku. Každý vzorek $p_{mn}(x_p, y_p)$ projekce scény je pak znásobena exponenciálním výrazem $\exp[-i2\pi b(x_p \sin \phi_m + y_p \sin \theta_m)]$. Všechny vzorky projekce jsou pak sečteny do jediné výsledné hodnoty podle výrazu:

$$u_{mn} = \iint p_{mn}(x_p, y_p) \exp[-i2\pi b(x_p \sin \phi_m + y_p \sin \theta_m)] dx_p dy_p, \quad (2.1)$$

kde b je reálná konstanta. Hodnoty u_{mn} jsou prvky matice U , jejíž každý element koreponduje jinému směru pohledu.

Komplexní matice U reprezentuje optické pole Fourierského hologramu. Výraz (2.1) je principiálně ekvivalentní optickému systému zobrazeném na obr. 2.2. Dle [AR03, Goo05]



Obrázek 2.2: Optický systém odpovídající syntéze. [AR03]

je komplexní amplituda $g(u, v)$ na zadní fokální rovině u, v z obrázku 2.2 dána výrazem:

$$g(u, v) = C \iiint t(x_s, y_s, z_s) \exp \left\{ -j \frac{2\pi}{\lambda f} \left[ux_s + vy_s - z_s \frac{u^2 + v^2}{2f} \right] \right\} dx_s dy_s dz_s \quad (2.2)$$

Pokud jsou splněny příslušné podmínky, může být rovnice (2.1) přepsána do formy, která je až na konstantu u exponenciálního členu ekvivalentní výrazu shodná s vztahem (2.2). Pro detaily viz [AR03].

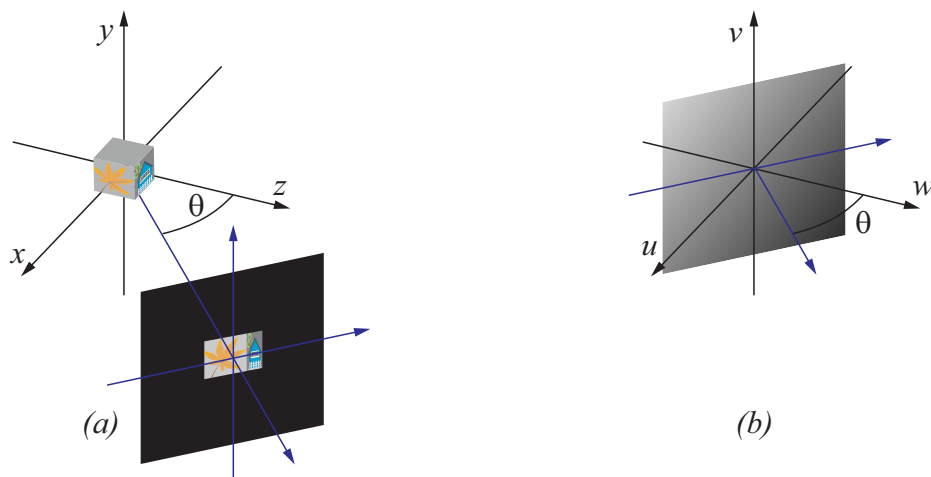
Vzhledem k tomu, že počet pohledů, potřebných pro výpočet jednoho hologramu je roven počtu vzorků hologramu, není tato metoda rychlejší než náš stávající algoritmus a to i přes možné urychlení odhadem vybraných snímků [KSR07]. V tomto ohledu je zajímavější druhá uvažovaná metoda podle [SIY04]. Autoři v publikaci uvádí, že plnohodnotný hologram může být vypočten pouze z malé podmnožiny pohledů použitých v předešlé metodě.

Autoři vychází ze vztahu mezi optickým polem v rovině hologramu, viz rovnice (2.3), a 3D Fourierovým spektrem scény, viz rovnice (2.4). Ze vztahu vyplývá, že hodnoty optického pole na rovině hologramu leží na rotačním paraboloidu v 3D Fourierovém spektru objektů scény. Na základě tohoto zjištění navrhli autoři metodu, která počítá příslušné koeficienty nepřímou na základě teoremu středového řezu (Central Slice Theorem [Gas78]). Teorém středového řezu dává do ekvivalence řez 3D Fourierova spektra funkce plochou ρ a Fourierovo spektrum projekce funkce na plochu ρ . Plocha ρ obsahuje počátek.

$$g(x_0, y_0) = \iiint O(x, y, z) \exp \left\{ -\frac{i2\pi}{\lambda} \left[\frac{x_0 x + y_0 y}{f} - \frac{(x_0^2 + y_0^2) z}{2f^2} \right] \right\} dz dy dx \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} g(u, v) &= \iiint O(x, y, z) \exp \left\{ -i2\pi \left[ux + vy - \frac{\lambda}{2} (u^2 + v^2) z \right] \right\} dx dy dz \\ &= \left\{ \iiint O(x, y, z) \exp[-i2\pi(ux + vy + wz)] dx dy dz \right\} \Big|_{w=-\lambda(u^2+v^2)/2} \\ &= \mathcal{F}[O(x, y, z)] \Big|_{w=-\lambda(u^2+v^2)/2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Postup metody je následující. Nejprve jsou objekty promítnuty na rovinu jejíž normála je odkloněna od osy Z o úhel θ . Obraz projekce je pak podroben 2D Fourierově transformaci. Výsledné koeficienty korespondují s koeficienty na rovinném řezu 3D Fourierského spektra, kde normála řezné roviny je také odkloněna od osy W o úhel θ . Z tohoto důvodu je proto možné získat část koeficientů na paraboloidu v místě průniku paraboloidu z rovnice (2.4) a řezné roviny.



Obrázek 2.3: (a) Ortogonální projekce v euklidovském prostoru a (b) řezná rovina ve frekvenčním prostoru spočítaná z jedné projekce. [SIY04]

Koeficienty, které lze získat z jednoho obrazu leží na průniku paraboloidu s příslušnou řeznou rovinou, viz obr. 2.4. Průnik může být vypočten z rovnice řezné roviny a rovnice paraboloidu, viz obr. 2.4. Průnikem je elipsa definovaná jako:

$$\left(u - \frac{\tan \theta}{\lambda}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{\tan \theta}{\lambda}\right)^2, \quad w = -u \tan \theta \quad (2.5)$$

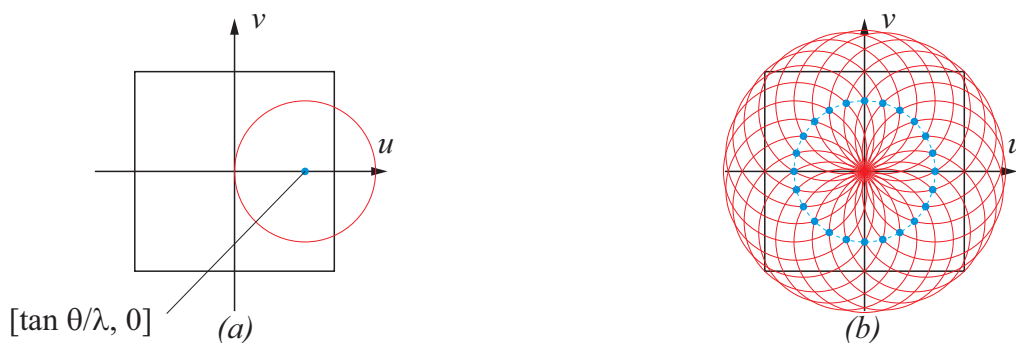
Pokud promítneme elipsu (2.5) na rovinu $u-v$, průmětem bude kruh o poloměru $\tan \theta / \lambda$. Pozice středu kružnice pak závisí na původním směru pohledu.



Obrázek 2.4: Rotační paraboloid. (a) Komponenty identické s optickým polem objektu (b) průsečnice rotačního paraboloidu a řezné roviny Fourierova spektra. [SIY04]

K výpočtu všech koeficientů na rovině $u-v$ je nutné vypočítat koeficienty na různých kruzích, které jsou zvoleny tak aby pokryly celou rovinu. Autoři navrhli kruhový způsob

snímání obrazů, který způsobí, že výsledné kruhy vytvoří vzor, který je vyobrazen na obr. 2.5.



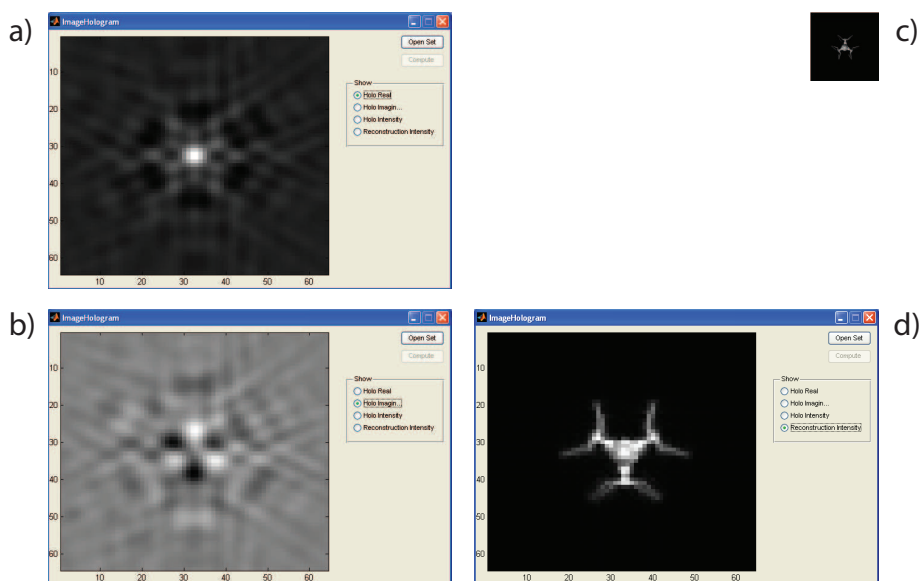
Obrázek 2.5: Oblast extrakce na rovině $u-v$ z (a) jedné projekce (b) řady projekcí. [SIY04]

Tato metoda vyžaduje zdatelně méně obrazů pro výpočet Fourierského hologramu, ale vyžaduje výpočet Fourieova spektra pro každý obraz. Autoři uvedli, že pro výpočet hologramu s rozlišením 256×256 použili jen 90 obrazů. Metoda dle [AR03] by potřebovala v tomto případě 65536 obrazů.

Kapitola 3

Implementace

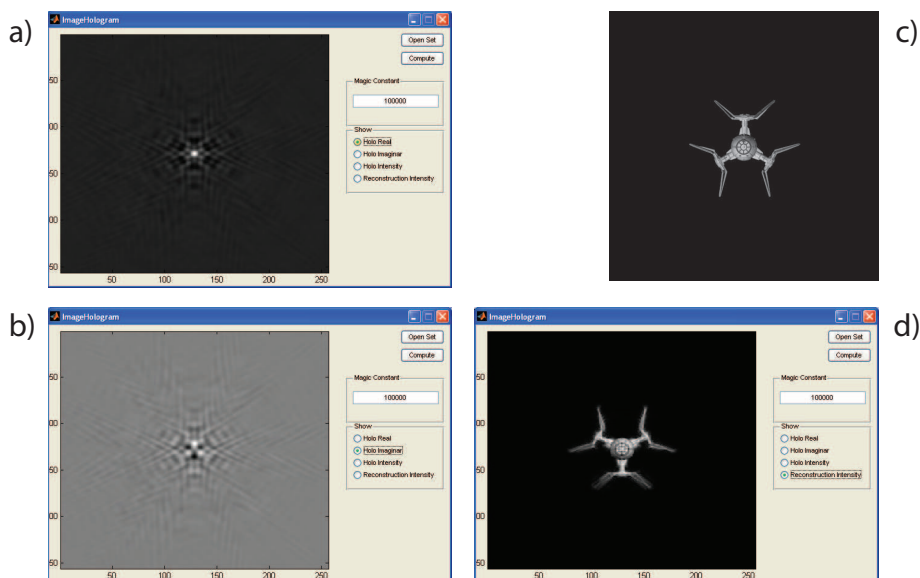
Implementace metody podle [AR03] byla provedena v Matlabu a byla testována s použitím výstupu aplikace 3D Studio Max. Metoda funguje tak, že každý vzorek hologramu je vypočítán z jedné projekce. Při psaní programu byl použit soubor 4096 projekcí s rozlišením 128×128 obrazových bodů. Z tohoto souboru byl spočítán hologram o rozlišení 64×64 bodů. Jedna z projekcí je předvedena na obr. 3.1c. Reálná složka a imaginární složka výsledného optického pole je na obr. 3.1a a obr. 3.1b. Zpětně rekonstruovaná intenzita je na obr. 3.1d.



Obrázek 3.1: Výsledek výpočtu dle metody [AR03] pro malé rozlišení. Reálná složka výsledného optického pole (a), imaginární složka (b), jeden z vypočtených snímků (c), intenzita numerické rekonstrukce (d).

Po doladění programu byl použit větší soubor pro hologram s rozlišením 256×256 , tj. 65536 projekcí s rozlišením 512×512 obrazových bodů. Jedna z projekcí je na obr. 3.2c, reálná a imaginární složka výsledného optického pole je na obr. 3.2a a obr. 3.2b. Zpětně zrekonstruovaná intenzita je na obr. 3.2d.

Implementace metody podle [AR03] byla provedena dle publikace. Jediný problém představovala konstanta b ve výrazu 2.1. Její význam a výpočet byl v článku [AR03]



Obrázek 3.2: Výsledek výpočtu dle metody [AR03] pro malé rozlišení. Reálná složka výsledného optického pole (a), imaginární složka (b), jeden z vypočtených snímků (c), intenzita numerické rekonstrukce (d).

popsán velice vágně a nedostatečně. Hodnota byla při pokusech odhadována metodou pokus-omyl.

Aby bylo možné metodu porovnat s naším postupem byla provedena zkušební implementace využívající GPU pro výpočet projekcí. Během ladění této metody byla zjištěna citlivost metody na konzistenci projekcí a zaokrouhlovací chybě rasterizéru. Uvedená citlivost je důsledkem vztahu (2.1). Pokud je počet rozsvícených pixelů malý, pak je zřejmé, že dojde-li vlivem zaokrouhlovacího mechanismu rasterizéru GPU k chybné změně počtu rozsvícených pixelů v projekci, pak bude výsledek součtu odlišný od předpokládané hodnoty a rekonstrukce bude vykazovat chyby. Nicméně pokud se projekce vypočte s vyšším rozlišením a následně se převzorkuje do požadované velikosti, pak je možné chyby vzniklé vlivem zaokrouhlování rasterizéru redukovat.

Implementace metody podle [SIY04] byla taktéž provedena v C++, protože projekce scény pro tuto metodu byly počítány na GPU. Princip celé metody je velice jednoduchý. Pro každou projekci je spočítána její Fourierova transformace. Z výsledného pole jsou pak extrahovány jednotlivé koeficienty a po příslušné transformaci kmitočtových souřadnic jsou zapsány do výsledného optického pole. Bohužel je článek [SIY04] napsán velice tajemně a parametry výpočtu použitého pro získání dat použitých v ukázkách nebyly uvedeny. Pokusy zopakovat výsledky autorů tak selhaly.

Kapitola 4

Závěr

Uvedené metody se jeví jako perspektivní. Snaha o jejich přesnou implementaci však selhala vlivem nedostatečně precizního popisu v příslušných publikacích. Metodou dle [AR03] bylo dosaženo lepších výsledků, na druhou stranu to byla metoda, od které jsme toho moc neočekávali a to především vlivem velkého množství projekcí požadovaných metodou.

Metoda dle [SIY04] měla větší potenciál, hlavně z výkonnostního hlediska. Dle autorů byl nejmenší nutný počet projekcí velmi nízký. Přesnou implementaci však nebylo možné dokončit bez dalšího úsilí zpětně objevit celou metodu a to z důvodu nedostatečného popisu metody ve zdrojové publikaci.

Pokud bychom pominuli fakt, že se nám nepodařilo dokončit přesnou implementaci a zopakovat výsledky publikované autory obou publikací lze konstatovat, že metoda dle [AR03] nepřináší žádnou podstatnou výhodu, která by způsobila její převahu. Z pohledu výkonnostního se též jedná o metodu se složitostí $O(N^4)$. Metoda dle [SIY04] je výkonnostně podstatně slibnější. Její největší slabinou je však její datový tok pro větší hologramy a její obtížnou separovatelnost, která zamezuje efektivní paralelizaci.

Literatura

- [AR03] D. Abookasis and J. Rosen. Computer-generated holograms of three-dimensional objects synthesized from their multiple angular viewpoints. *J. Opt. Soc. Am. A*, 20(8):1537–1545, 2003.
- [Gas78] J. D. Gaskill. *Linear Systems, Fourier Transforms, and Optics*. John Wiley & Sons, 1978.
- [Goo05] J.W Goodman. *Introduction to Fourier Optics*. Roberts & Company Publishers, 3rd edition, 2005.
- [Har96] P. Hariharan. *Optical Holography: Principles, techniques and applications*. Cambridge University Press, 2nd edition, 1996.
- [HJS07] I. Hanák, M. Janda, and V. Skala. Full-parallax hologram synthesis of triangular meshes using a graphical processing unit. In *3DTV Conference proc.*, pages ?–?, 2007.
- [Jan07] M. Janda. Digital hologram synthesis. Technical Report DCSE/TR-2007-02, University of West Bohemia, 2007.
- [JHS06] M. Janda, I. Hanák, and V. Skala. Digital HPO hologram rendering pipeline. In *EG2006 short papers conf. proc.*, pages 81–84, 2006.
- [KSR07] B. Katz, N. T. Shaked, and J. Rosen. Synthesizing computer generated holograms with reduced number of perspective projections. *Optics Express*, 15(20):13250–13255, 2007.
- [SIY04] Y. Sando, M. Itoh, and T. Yatagai. Full-color computer-generated holograms using 3-D Fourier spectra. *Optics Express*, 12:6246–+, 2004.

Seznam obrázků

| | | |
|-----|--|---|
| 2.1 | Projekce scény z úhlů $\theta = \theta_m$ a $\varphi = \phi_m$ [AR03]. | 2 |
| 2.2 | Optický systém odpovídající syntéze. [AR03] | 3 |
| 2.3 | Ortogonální projekce a řezné roviny. | 4 |
| 2.4 | Rotační paraboloid. | 4 |
| 2.5 | Extrakce koeficientů z řezu. | 5 |
| 3.1 | Výsledek výpočtu dle metody [AR03] pro malé rozlišení. Reálná složka výsledného optického pole (a), imaginární složka (b), jeden z vypočtených snímků (c), intenzita numerické rekonstrukce (d). | 6 |
| 3.2 | Výsledek výpočtu dle metody [AR03] pro malé rozlišení. Reálná složka výsledného optického pole (a), imaginární složka (b), jeden z vypočtených snímků (c), intenzita numerické rekonstrukce (d). | 7 |

Seznam tabulek